INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

Curso de Licenciatura em Engenharia e Ciência de Computadores

Correcção do Teste 1

1. Considere a proposição $(p \vee (\neg q \wedge r)) \longleftrightarrow (p \longrightarrow r)$

   (a) (**12**) Verifique se é uma tautologia;
   Resolução: Não se trata de uma tautologia, pois

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \wedge r$	$p \vee (\neg q \wedge r)$	$p \longrightarrow r$	$(p \vee (\neg q \wedge r)) \longleftrightarrow (p \longrightarrow r)$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	F

   (b) (**8**) Determine a sua forma normal disjuntiva.
   Resolução: $(p \vee (\neg q \wedge r)) \longleftrightarrow (p \longrightarrow r) \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

2. (**7+7+6**) Cada proposição na coluna **I** é equivalente à uma e uma só proposição da coluna **II**. Faça a correspondência. Justifique!

   A. $p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee \neg r) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r \equiv (p \wedge q) \longrightarrow r.$

   B.

$$\begin{aligned} p \longleftrightarrow q &\equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \\ &\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q). \end{aligned}$$

   C. $\neg(p \longleftrightarrow q) \equiv (\neg(\neg p) \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv (\neg p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow \neg p) \equiv (\neg p \longleftrightarrow q);$

   Portanto,

   A. c

   B. a

   C. b.

3. Considere os seguintes proposição:

   $(\forall x \in \mathbb{N})(x^2 \neq 0);$

   $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{N})((x^2 = y^2) \longrightarrow (x = y))$

$(\exists y \in \mathbb{Z})((y \neq 0) \longrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z})(y = x^2))$.

(a) (**5**) Traduza a terceira proposição para a linguagem corrente;
Resolução: Existe um inteiro y, tal que se y é diferente de zero então existe algum inteiro x, tal que y é igual ao quadrado de x.

(b) (**3**$\times$**5**) Determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposição. Justifique!
Resolução:

$(\forall x \in \mathbb{N})(x^2 \neq 0)$. **Verdadeiro**.
$(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{N})((x^2 = y^2) \longrightarrow (x = y))$. **Falso**. Contra-exemplo $x = 1,\ y = -1$.
$(\exists y \in \mathbb{Z})((y \neq 0) \longrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z})(y = x^2))$. **Falso**. Contra-exemplo $y = -1$.

4. (**4**$\times$**5**)

$A = \{-1, 0, 1, 3\}$;
$B = \{3k : k \in A\} = \{-3, 0, 3, 9\}$;
$C = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
$D = \mathbb{Z} \cap [\pi, 5] = \{4, 5\}$

(a) $(A \triangle B) \cap C = \{-1, 1\}$;
(b) $(A \cap B) \setminus C = \{3\}$;
(c) $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{4, 5\}\}$;
(d) $D^2 = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$.

5. Mostre que para quaisquer conjuntos A, B, C se tem

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Será que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$? Justifique!
Resolução:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= A \cap \overline{(B \cup C)} \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= A \cap A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\ &= A \cap \overline{B} \cap A \cap \overline{C} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \\ &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{aligned}$$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ não verdadeira. Tomando por exemplo $A = \{1, 2\},\ B = \{1\}$ e $C = \{2\}$, teremos:

$$A \setminus (B \cap C) = \{1, 2\} \quad \text{e} \quad (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \emptyset.$$